Кое-что из того, чему я научился у Юргена Мозера[1]

А. П. Веселов
Department of Mathematical Sciences,
Loughborough University, Loughborough LE11 3TU, UK
Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова

Светлой памяти Юргена Мозера

1. Введение

Девять лет прошло с тех пор, как я в последний раз разговаривал с Юргеном Мозером, но мне все еще больно думать о том, что это больше никогда не повторится. В тот раз встреча происходила в его доме в Шверценбахе неподалеку от Цюриха, который я проезжал, возвращаясь с конференции в июле 1999 года. Это было уже после того, как в его теле были обнаружены метастазы, и он уже знал свою судьбу. Видя вопрос в моих глазах, он сказал, что, вероятнее всего, ему осталось жить только до Рождества, и тут же сменил тему, взглянув на привезенную мной пластинку Страстей по Матфею, записанную в Германии в 1958 году. Он рассказал мне о времени, проведенном им в Принстоне, о своей дружбе с Джоном Нэшем и о многих других интересных деталях его жизни в тот период его жизни. Это был обычный Мозер, с которым я имел счастье быть знакомым в течение почти 10 лет. Я упомянул здесь об этом потому, что это показывает силу и мужество этого человека, что в сочетании с его достоинством и мудростью делает Мозера уникальным для всех тех, кто знал его достаточно хорошо.

Я не помню, чтобы Мозер когда-либо с кем-то спорил. Это не означает, что он не высказывал свое мнение напрямую. Напротив, он всегда делал это незамедлительно, но таким образом, который не мог бы оскорбить даже самого чувствительного человека. Однако он никогда не повторял свою точку зрения, в отличие, скажем, от меня. В каждом случае, о котором я помню, когда наши мнения не совпадали, он оказывался прав. Однажды речь зашла о волчке Эйлера. Я сказал, что, насколько мне известно, эта задача была проинтегрирована явно в эллиптических функциях только во второй половине XIX века (кажется, я упомянул Эрмита в связи с этим). Мозер считал, что это не так, но когда я продолжал настаивать, прореагировал своим обычным: «Really ?» На следующий день я нашел у себя на столе библиотечный том собрания сочинений Якоби, открытый на первой странице сообщения (объемом более 50 страниц!), датированного

[1] Перевод с английского. Оригинальное издание: A. P. Veselov, A few things I learnt from Jürgen Moser, *Regul. Chaotic Dyn.*, 2008, vol. 13, no. 6, pp. 515–524.

мартом 1850 года и адресованного Парижской академии наук, с полным интегрированием в эллиптических функциях не только уравнений Эйлера, но и движения, связанного с телом полного ортогонального репера. Были и другие случаи, в которых Мозер предоставлял мне самому разобраться, что я был неправ, и не возвращался к этому. Конечно, я не был исключением: вероятно, подобный опыт имели многие из визитеров Цюрихского Математического института, в то время когда им руководил Мозер.

Мои самые лучшие воспоминания о Мозере — это часы в конце его рабочего дня, когда он приглашал меня к себе в кабинет поговорить о математике: он сидит в своем кресле в очках, и время от времени делает заметки. Ведение записей было одной из его привычек, которые участники семинара по анализу в Цюрихской политехнической школе помнят очень хорошо: он делал это на каждом докладе, на котором присутствовал. Говорить с Мозером было подлинным удовольствием, но, к сожалению, другой его привычкой была пунктуальность, поэтому, чтобы продлить эти счастливые часы, я иногда провожал его до вокзала Штадельхофен.

В этой заметке, написанной для специального выпуска журнала «РХД», посвященного памяти Юргена Мозера, содержатся некоторые замечания об интегрируемых системах, появившиеся в результате бесед с ним и под влиянием его работ. Я рассказывал о них в различных докладах, но ранее не публиковал.

2. Интегрируемые модуляции: могут ли адиабатические инварианты быть точными?

Одна из проблем, которую я обсуждал с Юргеном Мозером в начале 1990-х, когда мы исследовали интегрируемые дискретизации классических систем [1], заключается в следующем.

Рассмотрим семейство интегрируемых гамильтоновых систем с гамильтонианом $H(p, q|A)$, зависящим от параметров $A = (a_1, \ldots, a_k)$. Примером может служить классическая задача Неймана о движении на единичной сфере с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}(a_1 q_1^2 + \ldots + a_N q_N^2).$$

Пусть $F_1(p, q|A), \ldots, F_N(p, q|A)$ — это соответствующие N независимых интегралов в инволюции.

Теперь предположим, что мы делаем параметры зависящими от времени: $A = A(t)$, где $A(t)$ — периодическая функция с периодом T. В общем случае интегрируемость системы, конечно, вообще говоря, нарушается. Я искал частные случаи, которые я назвал *интегрируемыми модуляциями*, когда значения интегралов $F_i(p(t), q(t)|A(t))$, где $(p(t), q(t))$ — произвольное решение модулированной системы

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q}(p, q|A(t)), \quad \frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}(p, q|A(t)), \tag{1}$$

также являются T-периодическими по времени с тем же периодом T. Отсюда следует, что сдвиг по времени на T вдоль траекторий модулированной системы дает интегрируемое симплектическое отображение с теми же самыми интегралами $F_1, \ldots, F_N$.

Мозер сказал, что он сформулировал бы вопрос следующим образом: *когда адиабатические инварианты являются точными?* Если мы подразумеваем под адиабатическими инвариантами переменные действия (см. [2]), то это значит, что модулированная динамика сохраняет торы Лиувилля исходной интегрируемой системы; таким образом, мы имеем просто неравномерное и непрямолинейное движение на каждом из этих торов.

В то время у меня был пример такой интегрируемой модуляции для волчка Эйлера, который является главным предметом этого параграфа. Начнем с более простого примера этого феномена: гармонического осциллятора[2].

Если мы рассмотрим гамильтониан гармонического осциллятора в виде

$$H = \frac{1}{2}(p^2 + \omega^2 q^2),$$

то легко видеть, что у него вообще нет никаких нетривиальных интегрируемых модуляций. Однако если мы рассмотрим эквивалентную гамильтонову систему с

$$H = \frac{1}{2}\omega(p^2 + q^2), \tag{2}$$

то *любая* модуляция $\omega = \omega(t)$ является интегрируемой.

Действительно, модулированная система

$$\frac{dp}{dt} = -\omega q, \quad \frac{dq}{dt} = \omega p,$$

очевидно, имеет интеграл

$$I = \frac{1}{2}(p^2 + q^2)$$

(который является переменной действия системы), и заменой времени $t \to \tau(t) : \frac{d\tau}{dt} = \omega(t)$ мы приводим его к немодулированной форме

$$\frac{dp}{d\tau} = -q, \quad \frac{dq}{d\tau} = p.$$

Модулированная система имеет решения

$$p = R\cos\tau(t),\ q(t) = R\sin\tau(t),$$

где угловая переменная $\varphi = \tau(t)$ зависит от t явным образом, определяемым функцией $\omega(t)$. Заметим, что гамильтониан (2) (который больше не является интегралом движения) изменяется периодически по времени при условии, что модуляция $\omega(t)$ периодическая.

Этот пример показывает, что, вообще говоря, для наперед заданной зависимости от параметров в гамильтониане мы можем вообще не иметь интегрируемых модуляций. В частности, такие модуляции, по-видимому, не существуют для системы Неймана или для тесно с ней связанной системы Якоби геодезических на эллипсоиде [3]. Интересно, что для волчка Эйлера такая модуляция существует даже в N-мерном случае, который мы собираемся здесь рассмотреть.

Согласно Арнольду [2] движение N-мерного твердого тела можно рассматривать как геодезический поток для левоинвариантной метрики на группе Ли $SO(N)$ с лагранжианом

$$\mathcal{L} = tr\frac{dX}{dt}J\frac{dX}{dt}^T.$$

Здесь $X \in SO(N)$, $J = J^T$ — это некоторая симметрическая положительно определенная матрица, а Y^T означает транспонирование матрицы Y. Соответствующий кинетический момент $M \in so(N)^*$ удовлетворяет *уравнению Эйлера*

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega], \tag{3}$$

[2] Я благодарен Анатолию Нейштадту, указавшему мне на этот пример.

где $\Omega = X^{-1}\frac{dX}{dt} \in so(N)$ — это угловая скорость, связанная с M соотношением

$$M = \Omega J + J\Omega. \tag{4}$$

Если мы введем линейный оператор $A : so(N) \to so(N)^*$ равенством $A(\Omega) = \Omega J + J\Omega$, то гамильтониан уравнения Эйлера может быть записан как

$$H = \frac{1}{2} tr M^T A^{-1}(M).$$

Доказательство интегрируемости соответствующей системы было найдено Манаковым [4]. Оно основано на важном наблюдении, что уравнение Эйлера может быть переписано в форме Лакса

$$\frac{dL}{dt} = [L, P], \tag{5}$$

где

$$L = M + \lambda J^2, \ \ P = \Omega + \lambda J \tag{6}$$

и λ — произвольный параметр (обычно называемый спектральным). Действительно, соотношение (5) эквивалентно

$$\frac{dM}{dt} = [M, \Omega], \ \ [J^2, \Omega] + [M, J] = 0, \ \ [J^2, J] = 0.$$

Третье соотношение тривиально, второе равносильно соотношению (4); таким образом, мы остаемся с исходными уравнениями Эйлера. Из уравнения Лакса (5) вытекает, что коэффициенты характеристического многочлена оператора L

$$P(\lambda, \mu) = \det(L - \mu I) = \det(M + \lambda J^2 - \mu I)$$

являются интегралами системы. Можно проверить, что это дает достаточно интегралов в инволюции для того, чтобы утверждать лиувиллеву интегрируемость системы, и что динамика является линеаризуемой на многообразие Прима спектральной кривой

$$P(\lambda, \mu) = 0.$$

Покажем теперь, что прием Манакова работает и в том случае, когда J не является постоянной, а зависит от t явно следующим образом:

$$J^2 = J_0^2 + f(t)I,$$

где $f(t)$ — произвольная скалярная функция, J_0 — постоянная симметрическая матрица, I — единичная матрица. Действительно, соответствующее модулированное уравнение Эйлера имеет тот же вид (3), только с зависящей от t матрицей

$$J = (J_0^2 + f(t)I)^{1/2}.$$

С помощью рассуждений, аналогичных вышеприведенным, можно показать, что это уравнение может быть переписано как

$$\frac{dM}{dt} = [M + \lambda J^2, \Omega + \lambda J].$$

Для нашего специального вида матрицы J мы имеем

$$[M + \lambda J^2, \Omega + \lambda J] = [M + \lambda J_0^2 + f(t)\lambda I, \Omega + \lambda J] = [M + \lambda J_0^2, \Omega + \lambda J].$$

Отсюда следует, что модулированная эйлерова система может быть записана в форме Лакса (5), где

$$L = M + \lambda J_0^2, \ P = \Omega + \lambda J.$$

Это означает, что интегралы невозмущенной системы, заданные коэффициентами характеристического многочлена $P_0(\lambda, \mu) = \det(M + \lambda J_0^2 - \mu I)$, сохраняются при модулировании системы, поэтому

$$J = (J_0^2 + f(t)I)^{1/2}$$

действительно является интегрируемой модуляцией. Динамика может быть точно описана как определенное движение на многообразии Прима соответствующей спектральной кривой $P_0(\lambda, \mu) = 0$.

Заметим, что гамильтониан, так же как и все другие интегралы исходной системы, заданные коэффициентами многочлена $P(\lambda, \mu) = \det(M + \lambda J^2 - \mu I)$, зависит от t:

$$P(\lambda, \mu) = \det(M + \lambda J_0^2 + f(t)\lambda I - \mu I) = P_0(\lambda, \mu - f(t)\lambda),$$

и их зависимость от t будет периодической, если модуляция $f(t)$ была периодической.

Соответствующий T-сдвиг дает интегрируемую дискретизацию волчка Эйлера, которая заслуживает дальнейшего исследования. Она зависит от выбора функции $f(t)$ и соответствует определенным сдвигам на многообразиях Прима. По сравнению с дискретизацией из [1] ее производящая функция (лагранжиан) является, по-видимому, очень сложной функцией (ср. со статьей [5], в которой были предложены различные дискретизации волчка Эйлера).

3. Интегрируемость и анализ: являются ли гиперболические автоморфизмы тора интегрируемыми ?

Во время одной из моих поездок в Цюрих, когда Сергей Табачников также был гостем Математического Института, мы подумали, что было бы хорошей идеей взять интервью у Мозера для журнала «Квант» (американская версия “Quantum”), в котором Сергей был одним из редакторов. Мозер без колебаний согласился. Мы дали ему около десятка вопросов, на которые, как мы думали, он просто написал бы ответы. Вместо этого он пригласил нас поговорить об этом. Я не могу простить себе того, что мы были не готовы к этому и не смогли впоследствии подготовить что-либо к публикации, поскольку сказать, что это было интересно — это не сказать ничего.

Один из вопросов был о математике и о том, где в ней он видит себя. Мозер сказал, что он противник деления математики на отдельные дисциплины и рассматривает себя просто как математика. Однако он добавил, что теперь он не так активен, как ранее, и что он оставил для себя лишь небольшой сад, где пытается следить за всеми главными событиями. Этим садом для Мозера был *анализ*.

Интегрируемые системы лежат на пересечении теории дифференциальных уравнений с другими областями математики, в первую очередь с геометрией и алгеброй. Анализ обычно связывается с интегрируемостью только через КАМ-теорию. Юрген Мозер является одним из очень немногих настоящих аналитиков, которые внесли решающий вклад в современную теорию интегрируемости. Многие из нас изучали эту теорию по его блестящим Брессанонским лекциям [3].

Я хотел бы поговорить теперь об одном явлении в этой теории, которое я понял сравнительно недавно. Речь идет о различии между гладкой и аналитической интегрируемостью. Один из самых известных результатов Мозера заключается в том, что КАМ-теория работает в гладкой категории так же, как в аналитической, где это было показано ранее Колмогоровым и Арнольдом. Следующий пример, являющийся вариацией примера Болсинова-Тайманова [6], демонстрирует, насколько велико в действительности различие между этими двумя категориями.

Рассмотрим следующее отображение тора (иногда называемого в английской литературе "cat-map")

$$A : T^2 \to T^2,$$

где $T^2 = \mathbf{R}^2/\mathbf{Z}^2$ — это двумерный тор и

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

или какой-либо другой гиперболический автоморфизм $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z})$.

Классический результат Аносова гласит, что любой гиперболический автоморфизм тора является структурно устойчивым в C^1-топологии. Это — канонический пример хаотической системы с положительной топологической энтропией, которая, как можно показать, в этом случае равна $\log \lambda$, где $\lambda > 1$ — наибольшее собственное значение матрицы A.

Я хочу объяснить теперь, что на самом деле есть несколько причин для того, чтобы рассматривать эту систему как интегрируемую.[3] Во-первых, это — линейное отображение, и поэтому оно может быть проинтегрировано явно средствами линейной алгебры. Существует, конечно же, проблема с интегралами, так как динамика является эргодической на торе. Тем не менее, я утверждаю, что *естественное расширение аносовского отображения* на кокасательное расслоение тора

$$\hat{A} : T^*T^2 \to T^*T^2$$

является интегрируемым в смысле Лиувилля с *гладкими* интегралами.

Действительно, в собственных координатах u, v для A расширенное отображение имеет вид

$$\hat{A} : (u, v) \to (\lambda u, \lambda^{-1} v), \quad (p_u, p_v) \to (\lambda^{-1} p_u, \lambda p_v);$$

таким образом, мы имеем два интеграла в инволюции: $F_1 = p_u p_v$ и

$$F_2 = e^{-\frac{1}{p_u^2 p_v^2}} \sin\left(2\pi \frac{\log p_u^2}{\log \lambda^2}\right).$$

Заметим, что второй интеграл является гладким, но не аналитическим.

Исходное отображение тора А отвечает *критическому уровню* $p_u = p_v = 0$. Это еще один вывод из этого примера (ср. Болсинов–Тайманов [6]): теорема Лиувилля–Арнольда ничего не говорит нам о том, что происходит на вырожденном уровне интегралов. В гладкой категории там может быть полный хаос!

Существует, конечно, другой, *топологический* аспект этого примера. Топологические препятствия для интегрируемости обсуждались в литературе, начиная с важной работы Козлова [8],

[3] Чтобы избежать упреков в злоупотреблении терминологией, я хочу сослаться на классическую книгу Биркгофа, английское издание [7] которой было опубликовано с предисловием Мозера: «Впрочем, когда кто-либо попытается сформулировать точное определение интегрируемости, появляется много возможностей, каждая из которых имеет определенный внутренний теоретический интерес».

но здесь я хотел бы обратить внимание на другое. Посмотрим снова на аносовское отображение тора A. На универсальном накрытии (которое в случае тора является плоскостью) динамика в действительности является интегрируемой. Только после проекции на тор мы получаем эргодичность. Схожий пример — это геодезический поток на поверхностях рода $g > 1$, который является хаотическим на поверхности, но полностью интегрируемым на гиперболической плоскости, накрывающей ее. Я бы назвал такой хаос *топологическим*. Он не имеет никакого отношения к разрешимости. Существует много примеров точно решаемых систем, которые являются эргодическими[4].

Вероятно, самый старый пример такого рода принадлежит Клоду Гаспару Баше (1581–1638), математику, поэту, лингвисту, широко известному своим переводом «Арифметики» Диофанта, в которой Ферма сделал свои знаменитые примечания на полях. В поисках рациональных решений диофантова уравнения

$$y^2 - x^3 = c$$

Баше заметил, что если (x, y) — это решение, то таковым является и

$$(x', y') = \left(\frac{x^4 - 8cx}{4y^2}, \frac{-x^6 - 20cx^3 + 8c^2}{8y^3}\right).$$

Это позволяет построить бесконечно много решений этого уравнения. Например, при $c = -2$ мы имеем

$$(3, 5) \to \left(\frac{129}{100}, -\frac{383}{1000}\right) \to \left(\frac{2340922881}{7660^2}, \frac{113259286337292}{7660^3}\right) \to \ldots.$$

Рациональное отображение $B : \mathbf{C}P^1 \to \mathbf{C}P^1$

$$x \to B(x) = \frac{x^4 - 8cx}{4(x^3 + c)}$$

называется *отображением Баше*. Геометрически это *отображение удвоения* для эллиптической кривой E, заданной уравнением $y^2 - x^3 = c$. Действительно, легко проверить, что

$$\wp(2z) = B(\wp(z)),$$

где $\wp(z)$ — соответствующая эллиптическая функция Вейерштрасса; таким образом, на E мы имеем отображение $z \to 2z$. Отображение Баше фактически является самым хаотическим среди рациональных отображений в том смысле, что его множество Жюлиа совпадает со всем $\mathbf{C}P^1$. В комплексной динамике этот важный пример хаотического отображения обычно приписывают Латтэ (см., например, Милнор [9]).

И снова я утверждаю, что это отображение имеет все основания для того, чтобы называться интегрируемым. Первая причина — это явная разрешимость в эллиптических функциях, что следует из вышесказанного. Другая причина — это существование бесконечного множества коммутирующих рациональных отображений (симметрий), что для необратимых отображений заменяет существование интегралов. Действительно, рациональные отображения B_n, определенные соотношениями

$$\wp(nz) = B_n(\wp(z)),$$

очевидно коммутируют друг с другом:

$$B_n B_m = B_m B_n, \quad B_2 = B.$$

[4]Забавно, что основные примеры хаотических систем, используемые в учебниках, имеют именно такую природу.

Глубокий результат Ритта утверждает, что все такие отображения связаны с некоторой формулой умножения для эллиптических функций. В многомерном случае существуют аналогичные примеры, связанные с простыми комплексными алгебрами Ли (подробности см. в [10]).

4. Геодезические на гиперболоиде: отображение Кноррера и геодезическая эквивалентность как «регуляризации»

Мозер как лектор имел уникальный стиль. Я ходил на один из его курсов по динамическим системам для студентов Цюрихской политехнической школы (поначалу больше ради изучения немецкого языка, но затем потому, что мне очень понравились его лекции). Обычно в течение первого часа он объяснял результат и основные идеи доказательства, используя самые простые рассуждения и примеры. Затем после перерыва давались полные доказательства со всеми деталями. Ни один вопрос не оставался без ответа. Мозер, который обычно следил за временем очень строго, тем не менее всегда отвечал подробно на все вопросы, стараясь удостовериться, что материал был уяснен полностью. Это сочетание простоты и ясности с математической честностью, не позволяющей ему скрывать нежелательные технические детали «под ковром», я находил замечательным.

То же самое касается его работ. Мозер говорил мне, что большое количество производных (333) в его формулировке теоремы об инвариантных кривых в КАМ-теории требовалось только ради простоты рассуждений, и он мог бы легко уменьшить их (по-моему, он сказал до 18) за счет дополнительных технических деталей, которые могли бы заслонить основную идею. Хорошим примером замечательного стиля Мозера является его статья [11]. Она имеет непосредственное отношение к проблеме, которую я хочу обсудить.

В первой части этой статьи Мозер рассматривает задачу Кеплера с гамильтонианом

$$H = \frac{1}{2}|p|^2 - \frac{1}{|q|}.$$

Заменяя переменную времени t на

$$s = \int \frac{dt}{|q|}$$

и используя стереографическую проекцию, он показывает, что поверхность энергии $H = c$ при отрицательных c может быть компактифицирована так, что регуляризованный поток эквивалентен просто геодезическому потоку на единичной сфере (трехмерной в обычном случае, когда $q \in \mathbf{R}^3$). Заметим, что из-за столкновений (соответствующих $|q| \to 0$) регуляризация действительно необходима. Замена времени позволяет продолжить движение после столкновения гладким образом. Мозер пишет, что о такой регуляризации, по существу, знали еще Леви-Чивита и Зундман, но похоже, что топологическая картина регуляризации была впервые ясно объяснена именно в его статье[5].

Простое замечание, которое я хотел бы сделать в том же направлении, связано с задачей о геодезических на гиперболоиде. Все алгебраические выкладки здесь — такие же, как в хорошо изученной задаче Якоби о геодезических на эллипсоиде. Однако поведение геодезических в этих двух задачах весьма различается: в случае Якоби динамика является квазипериодической, в то

[5] На квантовом уровне это соответствует $SO(4)$-симметрии в задаче Кеплера с отрицательной энергией, открытой В. Фоком в 1935 г.

время как на гиперболоиде геодезические, вообще говоря, уходят на бесконечность. Я хочу объяснить здесь, что это различие исчезает, если произвести «компактифицирующую регуляризацию» задачи о геодезических на гиперболоиде, используя преобразование Кноррера [12].

Напомним сначала результат Кноррера (который я также узнал от Мозера [13]). Пусть

$$(A^{-1}x, x) = 1 \tag{7}$$

— это уравнение квадрики Q в $(n+1)$-мерном евклидовом векторном пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$, которую для начала мы будем считать эллипсоидом. Геодезические на Q в натуральном параметре (длины) s описываются уравнением

$$x'' = \lambda Bx,$$

где штрих означает производную по s, $B = A^{-1}$, а λ — это множитель Лагранжа, определяемый соотношением (7):

$$(Bx, x') = 0, \quad (Bx, x'') + (Bx', x') = 0, \quad \lambda(Bx, Bx) + (Bx', x') = 0,$$

$$\lambda = -\frac{(Bx', x')}{|Bx|^2}. \tag{8}$$

Следуя Кнорреру [12], рассмотрим замену параметризации

$$s \to \tau = \int \alpha(s)ds, \tag{9}$$

где $\alpha^2 = -\lambda$. Кноррер обратил внимание на тот замечательный факт, что вектор нормали к геодезической

$$q = \frac{Bx}{|Bx|} \tag{10}$$

в новом времени τ удовлетворяет классической системе Неймана:

$$\frac{d^2q}{d\tau^2} = -Bq + \mu q, \ q \in \mathbb{R}^{n+1}, \ |q| = 1. \tag{11}$$

Другими словами, гауссово отображение (10) в сочетании с перепараметризацией (9) преобразует геодезические в траектории системы Неймана на единичной сфере в гармоническом поле с потенциалом

$$U(q) = \frac{1}{2}(Bq, q).$$

Соответствующие орбиты имеют один из интегралов фиксированным: в обозначениях Мозера [13]

$$\Psi_0\left(\frac{dq}{dt}, q\right) = 0, \tag{12}$$

где

$$\Psi_0(u, v) = (1 - (Au, u))A(v, v) + (Au, v)^2, A = B^{-1}.$$

Таким образом, преобразование Кноррера осуществляет биекцию между единичным касательным расслоением $\mathcal{M}$ к эллипсоиду Q и подмногообразием $\mathcal{N}$ (ко)касательного расслоения к единичной сфере, заданным соотношением (12), отображая геодезические в орбиты задачи Неймана.

Рассмотрим теперь случай, когда квадрика Q является гиперболоидом. В этом случае геодезические, вообще говоря, будут уходить в бесконечность, и соответствующий множитель Лагранжа λ стремится к 0 при $s \to \infty$. Чтобы найти скорость убывания, мы заметим, что геодезическая проблема имеет следующий интеграл Иоахимсталя

$$F = |Bx|^2 (Bx', x').$$

Действительно,

$$\begin{aligned} F' &= 2(Bx', Bx)(Bx', x') + 2|Bx|^2(Bx', x'') = \\ &= 2(Bx', Bx)(Bx', x') + 2\lambda|Bx|^2(Bx', Bx) = 2(Bx', Bx)((Bx', x') + \lambda|Bx|^2) \equiv 0. \end{aligned}$$

Используя этот интеграл, мы можем записать

$$\lambda = -\frac{(Bx', x')}{|Bx|^2} = -\frac{F}{|Bx|^4}.$$

Поскольку в бесконечности $|Bx| \approx cs$, мы видим, что $\lambda \approx Cs^{-4}$ и, таким образом, $\alpha = \sqrt{-\lambda}$ убывает как s^{-2} (нужно быть аккуратным со знаком λ в случае гиперболоида, но это может быть сделано во всех случаях). Это означает, что интеграл $\tau = \int \alpha(s)ds$ сходится на бесконечности; таким образом, требуется *конечное время* в новой переменной времени τ, чтобы достигнуть бесконечности. Система Неймана говорит нам, что случится впоследствии: геодезическая будет возвращаться из «той же самой» бесконечности (вообще говоря, вдоль другого пути), затем пойдет в «другую», и так далее. Заметим, что система Неймана не изменится при замене $B \to B - zI$ для любого z; таким образом, переход от эллипсоида к гиперболоиду не чувствуется, изменяется только значение интеграла Ψ_0 (ср. с комментариями Мозера в параграфе 3.5 в [13]).

Преобразование Кноррера производит необходимую компактификацию и определяет там гладкую динамику. Для того чтобы понять, что происходит геометрически, удобно использовать двойственную квадрику Q^*, задаваемую как

$$(Ay, y) = (B^{-1}y, y) = 1, \quad y = Bx \in \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тогда гауссово отображение становится просто *центральной проекцией* гиперболоида Q^* на единичную сферу:

$$p : y \to q = \frac{y}{|y|}.$$

Образом является открытое множество с границей $\mathcal{B}$, задаваемой как пересечение сферы с асимптотическим конусом $(Aq, q) = 0$. Точки на границе соответствуют «бесконечностям» гиперболоида. Заметим, что когда $(Aq, q) = 0$, соотношение (12) сводится к

$$\left(Aq, \frac{dq}{dt}\right) = 0,$$

т. е., что вектор скорости должен быть касательным к границе.

Можно увидеть это уже на простейшем примере гиперболы

$$b_0 x_0^2 + b_1 x_1^2 = 1,$$

где $b_0 > 0,\ b_1 < 0$. В этом случае регуляризованнный поток будет просто периодическим движением туда и обратно по одной из ветвей гиперболы. Единичное касательное расслоение $\mathcal{M}$

в этом случае топологически эквивалентно дизъюнктному объединению двух открытых интервалов, а с точки зрения системы Неймана мы имеем окружность, которая является компактификацией $\mathcal{M}$ с двумя дополнительными точками, соответствующими двум «бесконечностям» гиперболы.

Двумерный случай более интересен. В частности, в случае однополостного гиперболоида мы имеем два семейства прямолинейных образующих, которые являются простейшими геодезическими. Для них (и только для них) мы имеем $(Bx', x') = 0$ и, соответственно, $\lambda \equiv 0$, что означает, что преобразование Кноррера формально не может быть применено. Центральная проекция отображает их в большие полуокружности, соответствующие предельному, бесконечно большому значению энергии в системе Неймана. Это показывает, что мы можем получить нечто большее и с геодезической стороны.

Существует другой, более геометрический способ компактификации геодезического потока на гиперболоиде, который я осознал после обсуждения этой задачи с Алексеем Болсиновым. Он основан на понятии геодезической эквивалентности метрик. Две метрики ds_1^2 и ds_2^2 (римановы или псевдоримановы) на многообразии M^n называются *геодезически эквивалентными*, если они имеют одни и те же геодезические, рассматриваемые как *непараметризованные* кривые. Тривиальный пример — это пропорциональные метрики $ds_2^2 = cds_1^2$, но существуют и другие примеры. Проблема описания геодезически эквивалентных метрик имеет давнюю историю, восходящую к работам Бельтрами и Дини в XIX веке (см. недавний обзор [14], где подчеркивается связь этой проблемы с интегрируемостью).

Рассмотрим следующий замечательный пример двух геодезически эквивалентных метрик, который, несмотря на его классический вид, по-видимому, был открыт только недавно независимо Табачниковым [15] и Матвеевым–Топаловым [14]. Пусть ds_1^2 — это ограничение евклидовой метрики

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n+1} dx_i^2 = (dx, dx)$$

в $\mathbb{R}^{n+1}$ на квадрику Q, заданную соотношением (7) (что является стандартной метрикой на Q), а ds_2^2 — это ограничение на Q метрики

$$dr^2 = \frac{b_1 dx_1^2 + b_2 dx_2^2 + \ldots + b_{n+1} dx_{n+1}^2}{b_1^2 x_1^2 + b_2^2 x_2^2 \ldots + b_{n+1}^2 x_{n+1}^2} = \frac{1}{|Bx|^2}(Bdx, dx). \tag{13}$$

Утверждается, что эти две метрики геодезически эквивалентны (см. [14, 15]). Этот результат изначально был сформулирован для эллипсоидов, но он очевидно имеет место и для гиперболоидов, хотя вторая метрика может стать неположительной (ср. с теоремой 4.13 в работе Хесина и Табачникова [16]).

Наблюдение, которое, возможно, является новым, состоит в том, что в случае гиперболоида вторая метрика ds_2^2 может быть естественно продолжена до *регулярной метрики на проективном замыкании* $\bar{Q} \subset \mathbb{R}P^{n+1}$. Самый простой способ проверить это заключается в непосредственном вычислении. В проективных координатах $z_0 : z_1 : \ldots : z_{n+1}$ квадрика $\bar{Q}$ задается уравнением

$$b_1 z_1^2 + \ldots + b_{n+1} z_{n+1}^2 = z_0^2,$$

где исходная квадрика Q является аффинной частью в карте, где $z_0 \neq 0$ и $x_k = z_k/z_0$. В другой карте, где, скажем, $z_1 \neq 0$, мы можем использовать аффинные координаты $y_k = z_k/z_1$, $k = 0, 2, \ldots, n+1$, связанные с x_k соотношениями

$$x_1 = \frac{1}{y_0},\ x_2 = \frac{y_2}{y_0},\ \ldots,\ x_{n+1} = \frac{y_{n+1}}{y_0}.$$

В них уравнение квадрики $\bar{Q}$ примет вид

$$b_1 + b_2 y_2^2 \ldots + b_{n+1} y_{n+1}^2 = y_0^2.$$

Нетрудно проверить, что вторая метрика ds_2^2 в этих координатах совпадает с ограничением на $\bar{Q}$ метрики

$$d\tilde{r}^2 = \frac{-dy_0^2 + b_2 dy_2^2 + \ldots + b_{n+1} dy_{n+1}^2}{b_1^2 + b_2^2 y_2^2 \ldots + b_{n+1}^2 y_{n+1}^2} \tag{14}$$

(заметим, что вне $\bar{Q}$ метрики $d\tilde{r}^2$ и dr^2 отличаются). Замечательный факт состоит в том, что эта метрика является регулярной, когда $y_0 = 0$ (что отвечает бесконечным x_k). Это означает, что ds_2^2 действительно может быть регулярно продолжена на все $\bar{Q}$.

Когда $n = 2$ мы имеем однополостный и двуполостный гиперболоиды, когда $b_1 < 0 < b_2 < b_3$ и $b_1 < b_2 < 0 < b_3$ соответственно. В первом случае $\bar{Q} = T^2$ — топологически двумерный тор, и метрика ds_2^2 имеем сигнатуру (1,1), во втором случае $\bar{Q} = S^2$ — это топологическая сфера с римановой метрикой $(-ds_2^2)$.

Связь геодезической эквивалентности с преобразованием Кноррера и общая геометрическая картина заслуживают дальнейшего исследования. Отметим здесь только, что сравнение формул (8), (9) с (13) показывает, что соответствующие перепараметризации совпадают. Это также может быть объяснением особой роли метрики (13) на квадриках.

Другой интересный вопрос — это спектральные свойства задачи

$$-\psi'' + E\lambda(s)\psi = 0,$$

где λ — это соответствующий множитель Лагранжа (8) (ср. [17, 18], где рассматривался случай эллипсоида).

Благодарности

Я чрезвычайно признателен своим коллегам из Лафборо Е. Ферапонтову, И. Маршаллу, А. Нейштадту и особенно А. Болсинову за плодотворные обсуждения. Я благодарен П. Гриневичу и С. Абенде, которые привлекли мое внимание к статье [17], а также М. Адлеру, А. Грюнбауму, М. Леви и С. Табачникову за замечания и поддержку.

Эта работа была частично поддержана Европейским Союзом через FP6 Marie Curie RTN ENIGMA (номер контракта MRTN-CT-2004-5652) и ESF программой MISGAM и EPSRC (грант EP/E004008/1).

Список литературы

[1] Moser, J. and Veselov, A. P., Discrete Versions of Some Classical Integrable Systems and Factorization of Matrix Polynomials, *Comm. Math. Phys.*, 1991, vol. 139, pp. 217–243.

[2] Arnold, V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 60, New York–Heidelberg: Springer, 1978.

[3] Moser, J., Various Aspects of Integrable Hamiltonian Systems, *Dynamical Systems (C.I.M.E. Summer School, Bressanone, 1978)*, pp. 233–289, Progr. Math., vol. 8, Boston, Mass.: Birkhäuser, 1980.

[4] Манаков, С.В., Замечание об интегрировании уравнений Эйлера динамики n-мерного твердого тела, *Функц. анализ и его прил.*, 1976, т. 10, № 4, с. 93–94.

[5] Bobenko, A. I., Lorbeer B., and Suris, Yu. B., Integrable Discretizations of the Euler Top, *J. Math. Phys.*, 1998, vol. 39, no. 12, pp. 6668–6683.

[6] Bolsinov, A. V. and Taimanov, I. A., Integrable Geodesic Flows with Positive Topological Entropy, *Invent. Math.*, 2000, vol. 140, no. 3, pp. 639–650.

[7] Birkhoff, G. D., *Dynamical Systems*, With an addendum by Jürgen Moser, AMS Colloquium Publications, vol. 9, Providence, R. I.: AMS, 1966.

[8] Козлов, В. В., Топологические препятствия к интегрируемости натуральных механических систем, *Докл. Акакд. наук СССР*, 1979, т. 249, № 6, с. 1299–1302.

[9] Milnor, J., On Lattès Maps, in *Dynamics on the Riemann sphere*, Zürich: Eur. Math. Soc., 2006, pp. 9–43.

[10] Веселов, А. П., Интегрируемые отображения, *УМН*, 1991, т. 46, № 5(281), с. 3-–45.

[11] Moser, J., Regularization of Kepler's Problem and the Averaging Method on a Manifold, *Comm. Pure Appl. Math.*, 1970, vol. 23, pp. 609–636.

[12] Knörrer, H., Geodesics on Quadrics and a Mechanical Problem of C. Neumann, *J. Reine Angew. Math.*, 1982, vol. 334, pp. 69–78.

[13] Moser, J., *Integrable Hamiltonian Systems and Spectral Theory*, Pisa: Lezioni Fermiane, 1981.

[14] Topalov, P. and Matveev, V. S., Geodesic Equivalence via Integrability, *Geom. Dedicata*, 2003, vol. 96, pp. 91–115.

[15] Tabachnikov, S., Projectively Equivalent Metrics, Exact Transverse Line Fields and the Geodesic Flow on the Ellipsoid, *Comment. Math. Helv.*, 1999, vol. 74, no. 2, pp. 306–321.

[16] Khesin, B. and Tabachnikov, S., Spaces of Pseudo-Riemannian Geodesics and Pseudo-Euclidean Billiards, http://arxiv.org/abs/math.DG/0608620.

[17] Cao, C., Stationary Harry–Dym's Equation and its Relation with Geodesics on Ellipsoid, *Acta Math. Sinica*, 1990, vol. 6, no. 1, pp. 35–41.

[18] Veselov, A. P., Two Remarks about the Connection of Jacobi and Neumann Integrable Systems, *Math. Z.*, 1994, vol. 216, pp. 337–345.